Välkommen till MVE340 Matematik B för Sjöingenjörer

Carl-Henrik Fant
E-post: carl-henrik.fant@chalmers.se
Tel: 772 35 57
Kontor: L3037 i matematikhuset, Johanneberg

Kursinnehåll i stora drag

- Funktioner – storheter relaterade till varandra
- Derivator – förändringshastigheter
- Integraler – summor
- Differentialekvationer
- Vektorräkning – krafter, moment mm.
- Linjer och plan i rummet

Kurslitteratur

- Emanuelsson: Grundläggande matematisk analys och linjär algebra för sjöingenjörer (Cremona)
- Kursen omfattar (delar av) kapitlen 1 – 7. Exakt vad som ingår och vad som krävs för godkänt kommer att anges i VeckoPM
- Jag kommer att ersätta en del av bokens övningsuppgifter med andra.

Examination

- Skriftlig tenta i slutet av kursen. Hjälpmedel: typgodkänd räknare, formelblad.
- Deltentor i slutet av läsvecka 2, 4 och 6.

Tentans utformning

- Tentan är delad i två delar, en första del (godkänddelen), som kan ge godkänt på kursen (betyg 3) och en andra del (överbetygsdelen), som, om tentanden erhållit godkänt på första delen, kan ge betyg 4 eller 5. Student som redan är godkänd på kursen, men önskar höja betyget, kan, om så önskas, lämna in endast den andra delen vid omtentamen.

Godkänddelen

- Fyra uppgifter som i sin tur består av deluppgifter. Varje uppgift kan ge maximalt 8 poäng. Dessa uppgifter skall enbart kontrollera om du nått målen för godkänt preciserade i veckoPM.
- För godkänt på denna del krävs minst 5 poäng på varje uppgift eller minst 25 poäng sammanlagt. Resultat från deltentor enligt nedan får ersätta motsvarande uppgift(er) på tentan.

Överbetygsdelen

- Består av tre uppgifter. Dessa är dels av problemkaraktär, eventuellt med teoretiska inslag (gränsen mellan teori och problem är diffus), dels rena teorifrågor som bevis av satser mm.
- Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.
- För betyg 4 krävs godkänt på första delen och minst 33 poäng totalt.
- För betyg 5 krävs godkänt på första delen och minst 42 poäng totalt.

Godkänt tack vare överbetygsdelen?

- I allmänhet kan inte poäng från överbetygsdelen räknas in för att nå godkändgränsen.
- Undantag görs om examinators helhetsbedömning av tentamen visar att studenten behärskar kursmålen nöjaktigt, t.ex. om brister inom ett områdes godkänddel kompenseras av kunskaper inom samma områdes överbetygsdel.

Deltentor

- Frivilliga deltentor planeras att ges fredag eller lördag vecka 2, 4 och 6. Alla som är registrerade på kursen får deltaga i deltentorna.
- Deltentorna motsvarar i tur och ordning uppgifterna 1, 2 och 3 på tentan. Erhållen poäng på deltenta får ersätta poäng på motsvarande uppgift på sluttentan, såväl den vid det ordinarie tentamenstillfället som vid omtentor tills kursen, eller dess motsvarighet, ges nästa läsår.

MVE340 Matematik B för Sjöingenjörer 2010/2011 Läsvecka 1 och 2

Omfattning

- Emanuelsson:
  - kapitel 1, Funktioner
  - Kapitel 2, Gränsvärden
  - Kapitel 3, Derivator t.o.m. 3.7

Kapitel 1: Funktioner

Viktiga begrepp

- funktionsbegreppet,
- definitions-, mål- och värdemängd till funktion,
- graf till funktion, graf till ekvation,
- närmevärde till funktion, linjär interpolation

Mål kapitel 1

För betyget godkänd skall du kunna:
1.2 skissa grafen till en funktion med stöd av värdetabell
1.2 bestämma definitions- och värdemängd till given funktion
1.2 använda linjär interpolation för att beräkna närmevärde till funktion
1.3 skissa graf till polynom av grad ett och två, potensfunktioner, exponentialfunktioner och logaritmfunktioner
1.3 skissa graf till trigonometrisk funktion med hjälp av amplitud, period, vinkelfrekvens och fasvinkel

För högre betyg skall du dessutom kunna:
- Inga ytterligare mål för högre betyg i detta kapitel

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Godkändnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
1.2	1.1a, 1.1d, 1.2a, komp1	1.1i, 1.2c	
1.3	1.3b, 1.3c, 1.4a	1.6a	
1.4	1.9b		

Funktionsbegreppet

Man kan uppfatta funktioner på flera olika, men likvärdiga sätt.

Ett är att se en funktion som en ”regel” som till varje element i en mängd (funktionens definitionsmängd) ordnar eller relaterar ett element i en annan mängd (funktionens målmängd).

Exempel 1

- Ett exempel på funktion med ”regel” är ordlängdsfunktionen:

Till varje ord i Svenska akademiens ordlista (SAOL) ordnas antalet bokstäver i ordet.

Definitionsmängd är orden i SAOL

målmängden är alla positiva heltal

värdemängden är alla tal som uppfyller att det finns ett ord av den längden.

Funktionsbegreppet 2

Ett annat sätt är att se en funktion f som en ”låda” som till varje ”input” ur funktionens definitionsmängd ger ett ”output” som finns i funktionens målmängd.

input $\longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow$ **output**

Detta sätt är ofta fruktbart då man studerar komplexa system.

Funktioner i denna kurs

- Det vi studerar här är reella funktioner

Detta betyder att såväl definitionsmängd som målmängd är delmängd till de reella talen.

Regeln som ger sambandet mellan ”input” och ”output” ges ofta av ett uttryck:

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x)$$

$f(x)$ = uttryck i variabeln x

Exempel 2

f är funktionen som ges av

$$f(x) = 3 \bullet x + 7$$

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow 3 \bullet x + 7$$

Definitionsmängd, D_f , är mängden av alla de reella talen. Värdemängden, V_f , är också alla reella tal.

Man säger och skriver ofta:

funktionen $f(x) = 3 \bullet x + 7$

Graf till en funktion

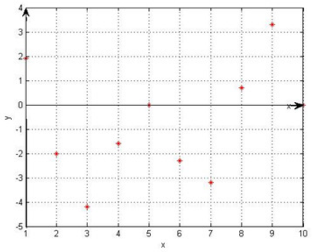
- Grafen till en funktion är alla punkter (x, y) sådana att $y = f(x)$, i ett xy –koordinatsystem.
- Att rita/skissa en graf innebär att man ritar lagom mycket av grafen med lagom stor precision.

Värdetabell

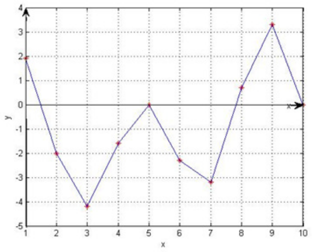
- Grafritning, även då en dator utför den, bygger alltid på en värdetabell.
- Exempel:
- $f(x) = x \bullet (x-5) \bullet (x-10) \bullet \cos(x)/10$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1.9	-2.0	-4.2	-1.6	0	-2.3	-3.2	0.7	3.3	0

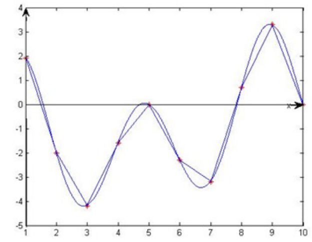
Markera först alla punkterna



Förbind punkterna



Snygga till



Interpolering

- Ibland känner man inte till ett exakt uttryck för funktionen. Man vet att den finns men känner bara till vissa värden, t.ex. genom mätningar.
- Trots det kan man vara intresserad av funktionsvärden även i andra punkter.
- Då tar man till någon form av interpolering eller extrapolering

Linjär interpolering

- Antag att man har mätdata enligt tabellen

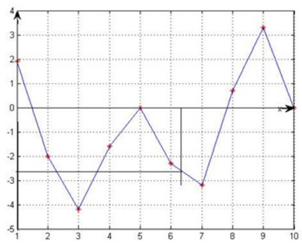
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1.9	-2.0	-4.2	-1.6	0	-2.3	-3.2	0.7	3.3	0

och att man vill veta $f(6.3)$.

Då kan man rita grafen enligt mätdata, med räta linjer mellan de givna punkterna.

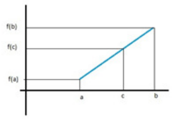
Det interpolerade värdet för $x = 6.3$ är det man får enligt grafen. ”Givetvis” uträknat och inte taget ur grafen.

Linjär interpolation



Beräknat värde $f(6.3) \approx f(6) + 0.3 \bullet (f(7) - f(6)) = -2.3 + 0.3 \bullet ((-3.2) - (-2.3)) = -2.57 \approx -2.6$

Linjär interpolation



Interpolerat värde

$$f(c) \approx f(a) + \frac{c-a}{b-a} \bullet (f(b) - f(a)) =$$

Graf till en ekvation

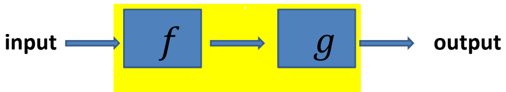
- Grafen till en ekvation i två variabler, x och y, är alla punkter (x, y) i ett xy-koordinatsystem som satisfierar ekvationen.
- Att rita/skissa en graf innebär att man ritar lagom mycket av grafen med lagom stor precision.

Grafer och kurvor

- Man kallar ofta grafen till en ekvation eller funktion för en kurva. Både den räta linjen och cirkeln i de föregående exemplen är kurvor. I matematikens värld finns det alltså raka kurvor.
- Hur avgör man om en kurva är graf till en funktion?

Sammansatt funktion

Om man har två funktioner f och g kan man bilda en ny funktion, den sammansatta funktionen.



Den sammansatta funktionen skrivs $g \circ f$ där alltså $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Elementära funktioner

- Polynom
- Rationella funktioner
- Potensfunktioner
- Exponentialfunktioner
- Logaritmfunktioner
- Trigonometriska funktioner
- Arcusfunktioner
- Allt man kan bilda genom addition, multiplikation etc. och sammansättningar av dessa är också elementära funktioner.

Kapitel 2: Gränsvärde och kontinuitet

Viktiga begrepp

- gränsvärde till funktion,
- kontinuerlig funktion,
- nollställe till funktion
- intervallhalveringsmetoden

Mål kapitel 2

För betyget godkänd skall du kunna:

2.3 beräkna gränsvärde till funktion med stöd av gränsvärdesregler (utom instängningsregeln) och direkt tillämpning av standardgränsvärden

2.3 beräkna gränsvärde till rationell funktion då $x \to \infty$

2.5 beräkna nollställe till funktion (rot till ekvation) med intervallhalveringsmetoden

För högre betyg skall du dessutom kunna:

2.3 beräkna gränsvärde även med stöd av instängningsregeln och då omskrivning av uttrycket är nödvändigt

Gränsvärde (intuitiv definition)

- En funktion f har gränsvärdet A då x går mot a

om

$f(x)$ är "hur nära A som helst"

för alla x som är "tillräckligt nära a".

Synonymer:

$f(x)$ har gränsvärdet A då x går mot a

$f(x)$ går mot A då x går mot a

$f(x) \to A$ då $x \to a$

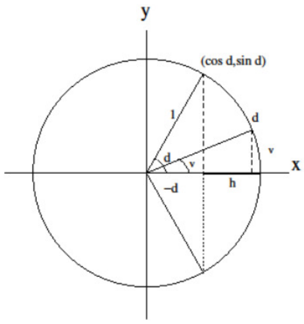
$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Definition av tangent

- En kurvtangent i en punkt $(a, f(a))$ på en kurva $y = f(x)$ är

  en linje L genom punkten $(a, f(a))$ sådan att vinkeln mellan L och sekanten genom punkterna $(a, f(a))$ och $(x, f(x))$ går mot 0 då x går mot a

Gränsvärde för cosinus och sinusfunktionerna



Kontinuitet

- En funktion kalls kontinuerlig i en punkt om gränsvärde och funktionsvärde sammanfaller i den punkten.
- Stegfunktionen

$$H(x) = \begin{cases} 1 \; om \; x > 0 \\ 0 \; om \; x \le 0 \end{cases}$$

  är inte kontinuerlig för x = 0, den saknar gränsvärde där.

Gränsvärdesregler

Om $f(x) \to A$ och $g(x) \to B$ då $x \to a$ och k är en konstant så gäller:

1. $f(x) + g(x) \to A + B$
2. $f(x) - g(x) \to A - B$
3. $f(x) \bullet g(x) \to A \bullet B, kf(x) \to kA$
4. $f(x)/g(x) \to A/B$ (om $B \neq 0$)
5. $f(x)^{g(x)} \to A^B$ (om $A \neq 0$)
6. om $h(y) \to C$ då $y \to A$ så gäller också $h(f(x)) \to C$ då $x \to a$

Gränsvärdesregler för svårare situationer

Instängning:

- Om både $f(x) \to A$ och $h(x) \to A$ då $x \to a$ och $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ så gäller också att $g(x) \to A$ då $x \to a$
- Om $h(x) \to 0$ då $x \to a$ och $0 \leq |g(x)| \leq |h(x)|$ så gäller också att $g(x) \to 0$ då $x \to a$
- Om $h(x) \to 0$ då $x \to a$ och $k(x)$ är begränsad så gäller också att $h(x) \bullet k(x) \to 0$ då $x \to a$

Några viktiga gränsvärden

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Satser om kontinuerliga funktioner

- Antag att f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$. Då gäller

1. f antar såväl största som minsta värde på intervallet, dvs. det finns punkter c och d i intervallet så att $f(c)$ är det största och $f(d)$ är det minsta funktionsvärdet.
2. f antar alla värden mellan det största och det minsta värdet.

Ekvationslösning Intervallhalveringsmetoden.

- Antag att f är kontinuerlig och att vi vill lösa ekvationen $f(x) = 0$.
- Vi hittar genom prövning ett intervall $[a, b]$ så att $f(a)$ och $f(b)$ har olika tecken, $f(a)f(b) < 0$.
- Satsen om mellanliggande värde ger att ekvationen har en rot i intervallet $[a, b]$. Mittpunkten, $c = (a + b)/2$ är ett närmevärde till roten med ett fel högst $(b - a)/2$.
- Om felet är för stort kan intervallet halveras. Vi väljer som nytt intervall $[a, c]$ eller $[c, b]$ beroende på om $f(a)f(c) < 0$ eller $f(c)f(b) < 0$
- Proceduren kan upprepas tills felet är tillräckligt litet.

Kapitel 3: Derivata

Viktiga begrepp

- derivata till funktion
- tangent till graf till funktion, normal
- växande/avtagande funktion

Mål kapitel 3

För betyget godkänd skall du kunna:

3.4-3.6 derivera enkla funktioner med hjälp av deriveringsregler

3.4-3.6 bestämma ekvation för tangent och normal i en punkt på en funktions graf

3.7 avgöra om en funktion är växande/avtagande med hjälp av derivatans tecken

För högre betyg skall du dessutom kunna:

3.4-3.6 derivera mer komplicerat uppbyggda funktioner med hjälp av deriveringsregler

3.4-3.6 lösa mer sammansatta problem med hjälp av derivata

Derivata

- En funktion kallas deriverbar i en punkt x om gränsvärdet

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

existerar.

Gränsvärdet kallas derivatan av f i punkten x och betecknas $f'(x)$

Beteckningar för derivata

$$f'(x)$$
$$(f(x))'$$
$$f'$$
$$Df(x)$$
$$\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(f(x))$$

Geometrisk tolkning

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ är riktningskoefficient för sekanten genom punkterna $(x, f(x))$ och $(x+\Delta x, f(x\ +\Delta x))$
Gränsvärdet $f'(x)$ är tangentens riktningskoefficient.

Tangenten i punkten $(a, f(a))$ har ekvationen:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Deriveringsregler

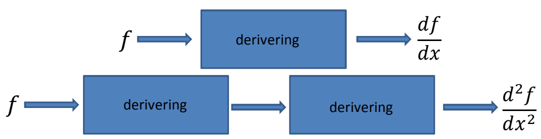
- Antag $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara med derivator $f'(x)$ och $g'(x)$. Då gäller:

1. $D\big(f(x)+g(x)\big) = f'(x) + g'(x)$
2. $D\big(kf(x)\big) = kf'(x),$
3. $D\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $D\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
5. $D(f(g(x))) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$

Andraderivata

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2f}{dx^2}$$

OBS! $\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ är något helt annat.



Beteckningar för andraderivata

$$f''(x)$$
$$(f(x))''$$
$$f''$$
$$D^2 f(x)$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

Viktiga funktioners derivator

1. $D(x^p) = px^{(p-1)}$
2. $D(e^x) = e^x$
3. $D(e^{cx}) = ce^x$
4. $D(a^x) = D\left(e^{x \ln a}\right) = a^x \ln a$
5. $D(\ln x) = \frac{1}{x}$
6. $D(\sin x) = \cos x$
7. $D(\cos x) = -\sin x$
8. $D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Växande/avtagande funktion

- En funktion kallas växande i ett intervall om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Den kallas strängt växande i intervallet om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Den kallas avtagande i intervallet om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- Den kallas strängt avtagande i intervallet om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Lokalt maximum

- En funktion har ett lokalt maximum i en punkt $(x_0, f(x_0))$ om $f(x) \leq f(x_0)$ för alla x i D_f tillräckligt nära x_0.

Betydelse av derivatans tecken

Antag att funktionen f är deriverbar i ett intervall (a, b) och att derivatan $f'(x)$ inte växlar tecken i intervallet. Då gäller:

- $f'(x) > 0 \;\Rightarrow f$ är strängt växande i intervallet.
- $f'(x) < 0 \;\Rightarrow f$ är strängt avtagande i intervallet.
- $f'(x) \geq 0 \;\Rightarrow f$ är växande i intervallet.
- $f'(x) \leq 0 \;\Rightarrow f$ är avtagande i intervallet.

- OBS! En strängt växande funktion kan ha $f'(x) = 0$ i enstaka punkter i intervallet i övrigt gäller $f'(x) > 0$